ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**PHẠM VĂN MẠNH**

# ĐA THỨC DUY NHẤT VÀ TẬP BI-URS CHO HÀM PHÂN HÌNH $P$-ADIC

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2017**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**PHẠM VĂN MẠNH**

# ĐA THỨC DUY NHẤT VÀ TẬP BI-URS CHO HÀM PHÂN HÌNH P-ADIC

**Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH**
**Mã số: 60.46.01.02**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Hướng dẫn khoa học**
**TS.VŨ HOÀI AN**

**THÁI NGUYÊN - 2017**

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào khác. Tài liệu tham khảo và nội dung trích dẫn đảm bảo sự trung thực và chính xác, tuân thủ các qui định về quyền sở hữu trí tuệ.

*Thái Nguyên, tháng 9 năm 2017*

Tác giả

**Phạm Văn Mạnh**

# Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới **TS.Vũ Hoài An**, người thầy tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, khoa Toán cùng toàn thể các thầy cô giáo trường ĐHSP Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã truyền thụ cho tôi những kiến thức quan trọng, tạo điều kiện thuận lợi và cho tôi những ý kiến đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè những người đã giúp đỡ và chia sẻ với tôi trong suốt thời gian học tập và hoàn thành luận văn của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

*Thái Nguyên, tháng 9 năm 2017*

Tác giả

**Phạm Văn Mạnh**

# Mục lục

# Mở đầu

Vấn đề xác định một hàm phân hình (hay đa thức, hàm nguyên) trên trường đóng đại số đặc trưng không $\mathbb{K}$ thông qua ảnh ngược của các tập hữu hạn đã được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học trên thế giới. Năm 1926, R. Nevanlinna đưa ra Định lí năm điểm nổi tiếng: Một hàm phân hình trên được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược, không tính bội, của năm giá trị phân biệt. Định lí năm điểm của R. Nevanlinna suy ra hai hàm nguyên chung nhau bốn giá trị hữu hạn phải là hàm đồng nhất hoặc hàm hằng. Kết quả này không thể tốt hơn.

Năm 1977, F. Gross đưa ra ý tưởng mới đó là không xét ảnh ngược của các điểm rời rạc mà xét ảnh ngược của các tập hợp các điểm trong một trường đóng đại số nào đó.

Giả sử $\mathbb{L}$ là trường số phức $\mathbb{C}$ hoặc trường đóng đại số, đặc trương không, đầy đủ với chuẩn không Acsimet $\mathbb{K}$ và $\mathcal{F}$ là họ các hàm xác định trên $\mathbb{L}$ lấy giá trị trên $\widehat{\mathbb{L}}$. Với $m_0$ là số nguyên dương hoặc $\infty$ , $f \in \mathcal{F}$ và $S \subset \mathbb{L} \cup \{\infty\}$ là tập khác rỗng, ta ký hiệu:

$$E_f^{m_0}(S) = \bigcup_{a \in S} \{(z, m) \in \mathbb{L} \times \mathbb{N} | f(z) = a \text{ với bội } n \text{ và } m = \min(n, m_0)\}$$

Trong trường hợp $m_0 = \infty$ (tương ứng $m_0 = 1$), ta viết:

$$E_f^{\infty}(S) := E_f(S) \left( \text{ tương ứng } E_f^1(S) := \overline{E}_f(S) \right).$$

Tập $S$ được gọi là *tập xác định duy nhất tính bội chặn* $m_0$, ký hiệu URS nếu với mọi cặp hàm khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ thỏa mãn điều kiện $E_f^{m_0}(S) = E_g^{m_0}(S)$ thì $f = g$. Trong trường hợp $m_0 = \infty$ tập $S$ thỏa mãn điều kiện trên được gọi là URS, còn với $m_0 = 1$ ta gọi $S$ là URS *không tính bội.*

Thời gian gần đây, nhiều tác giả đã nghiên cứu về $URS$ dựa trên hai hướng chính: Hướng thứ nhất là tìm các $URS$ khác nhau với số phần tử bé nhất có thể. Theo hướng này nhiều các tác giả đều dùng các ước lượng của các hàm Nevanlinna để chứng minh tập $S_Y = \{z \in \mathbb{C} | z^n + az^m + b = 0\}$, với các điều kiện khác nhau của $n, m, a, b$ là $URS$. Hướng thứ hai là tìm các đặc trưng của $URS$. Năm 1997, A. Boutabaa, A. Escassut và L. Haddad đã đưa ra một đặc trưng của $URS$ cho các đa thức trên trường đóng đại số $\mathbb{K}$ bất kì: "Một tập hữu hạn $S \subset \mathbb{K}$ là $URS$ cho các đa thức khi và chỉ khi $S$ là tập cứng affin, nghĩa là tồn tại hàm $h = ax + b, (a, b \in \mathbb{K})$ thỏa mãn $h(S) = S$ thì $h \equiv id$". Năm 1999, W. Cherry và C. C. Yang đã mở rộng kết quả này cho hàm nguyên trên trường không Acsimet.

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả về $URS$ cho các hàm phân hình trên trường $p$-adic và một khái niệm liên quan chặt chẽ với URS là đa thức duy nhất. Cụ thể, luận văn trình bày điều kiện đủ để một tập là URS cho $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ .

Các kết quả chính trong luận văn được dựa trên hai tài liệu chính là tài liệu [6] và [7].

Luận văn chia thành hai chương:

**Chương 1:** Giới thiệu một số kiến thức cơ bản sử dụng trong luận văn.

**Chương 2:** Giới thiệu khái niệm URS tính bội chặn cho các hàm phân hình trên trường $p$-adic. Trình bày một số kết quả về URS và đa thức duy nhất cho các hàm phân hình trên trường $p$-adic. Khái niệm Bi-URS cho $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$.

*Thái Nguyên, tháng 9 năm 2017*

Tác Giả

**Phạm Văn Mạnh**

# Chương 1

# Một số kiến thức chuẩn bị

## 1.1. Trường $p$-adic

### Chuẩn không Acsimet

**Định nghĩa 1.1.** Một *chuẩn* trên một trường $\mathbb{K}$ là một hàm

$$|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $|xy| = |x||y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{K}$;

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{K}$.

Nếu hàm này thỏa mãn thêm điều kiện

4) $|x + y| \leq max\{|x|, |y|\}$ với mọi $x, y \in \mathbb{K}$

thì ta gọi đây là *chuẩn không Acsimet*. Ngược lại, ta gọi là *chuẩn Acsimet*.

Mỗi chuẩn $|.|$ trên trường $\mathbb{K}$ cảm sinh một hàm khoảng cách $d$ xác định bởi

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ với } x, y \in \mathbb{K}$$

và do đó cảm sinh một tôpô trên $\mathbb{K}$. Trường mở rộng của trường $\mathbb{Q}$ theo chuẩn không Acsimet được gọi là *trường không Acsimet*.

Với mỗi số thực $r > 0$ và điểm $x \in \mathbb{K}$, ta kí hiệu đĩa mở, đĩa đóng, vòng tròn tâm $x$ bán kính $r$ tương ứng là:

$$D(x,r) = \{y \in \mathbb{K} : d(x,y) < r\};$$

$$\overline{D}(x,r) = \{y \in \mathbb{K} : d(x,y) \leq r\};$$

$$D < x,r >= \{y \in \mathbb{K} : d(x,y) = r\} = \overline{D}(x,r) \backslash D(x,r);$$

$D = D(0,1)$ và được gọi là đĩa đơn vị.

Với hằng số $c > 1$, hàm $\upsilon_c : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ cho bởi

$$\upsilon_c(x) = \begin{cases} -\log_c |x| & \text{nếu } x \in \mathbb{K}^* \\ +\infty & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

được gọi là *hàm cộng* tương ứng của chuẩn $|.|$

**Bổ đề 1.1.** *Một chuẩn trên trường $\mathbb{K}$ là không Acsimet nếu và chỉ nếu hàm cộng $\upsilon$ tương ứng của nó thỏa mãn các điều kiện sau:*

1) $\upsilon(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\upsilon(xy) = \upsilon(x) + \upsilon(y),$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{K};$

3) $\upsilon(x+y) \geq min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\},$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{K}.$

## Số $p$-adic và trường $p$-adic

Cho $p$ là số nguyên tố cố định. Với mỗi số nguyên $a$ khác không có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$a = p^{\upsilon}.a', \ p \text{ không chia hết cho } a' \in \mathbb{Z}^+,$$

khi đó $\upsilon$ được xác định duy nhất bởi $p$ và $a$. Ta kí hiệu $\upsilon_p(a) = \upsilon$. Khi đó ta thu được hàm

$$\upsilon_p : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}_+$$

Ta mở rộng $\upsilon_p$ lên trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ như sau: nếu $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, đặt

$$\upsilon_p(x) = \begin{cases} \upsilon_p(a) - \upsilon_p(b) & \text{nếu } x \neq 0 \\ +\infty & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Với mỗi $x \in \mathbb{Q}$, ta thu được chuẩn $p$-adic tương ứng, kí hiệu $|\ |_p$ được cho bởi

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

**Định nghĩa 1.2.** Hai chuẩn trên trường $\mathbb{K}$ gọi là tương đương nếu nó cùng cảm sinh ra một hàm khoảng cách và do đó nó cảm sinh một tô pô trên $\mathbb{K}$.

**Định lý 1.1.** (Định lí Ostrowski) *Mọi chuẩn không tầm thường trên $\mathbb{Q}$ đều tương đương với một trong hai chuẩn sau:*
*Chuẩn p-adic;*
*Giá trị tuyệt đối thông thường.*

Như vậy chỉ có hai hướng mở rộng trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ đó là mở rộng theo chuẩn giá trị tuyệt đối thông thường ta được trường các số thực $\mathbb{R}$ và mở rộng theo chuẩn $p$-adic ta được trường các số $p$-adic, kí hiệu là $\mathbb{Q}_p$.

Kí hiệu $\overline{\mathbb{Q}}_p$ là bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$. Tuy nhiên $\overline{\mathbb{Q}}_p$ không đầy đủ theo tôpô không Acsimet. Kí hiệu $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ là mở rộng đầy đủ theo tôpô không Acsimet của bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$ và được gọi là trường số phức $p$-adic.

Kí hiệu $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ là vành hàm nguyên trong $\mathbb{C}_p$ và $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ là trường các hàm phân hình, có nghĩa là trường các hàm thương của $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$.

## 1.2. Các định lí cơ bản của Nevanlinna

### Các hàm đặc trưng Nevanlinna và tính chất

Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong đĩa $\overline{D}_r \in \mathbb{C}_p$ và giả sử $f(z)$ được viết dưới dạng

$$f(z) = f_0(z) \prod_i (z - a_i) \prod_j \frac{1}{(z - b_j)},$$

trong đó $f_0$ không có không điểm hoặc cực điểm trong $\overline{D}_r$, $a_i$ và $b_j$ tương ứng là các không điểm và cực điểm tính cả bội của $f$.

Ta kí hiệu:

$n(r, 0, f) =$ số không điểm của f trong $\overline{D}_r$;